*

Anvendelser av normalformsteoremet i utsagnsteorien.

Craigs interpolasjonsteorem og Robinsons "Joint Consistency"-teorem

*

Morten Rognes

2011

*

© Morten Harboe Rognes 2011

§1 Innledning

Hovedhensikten med dette notatet er å demonstrere visse anvendelser av det vi har kalt normalformsteoremet i utsagnsteorien.[1] Dette normalformsteoremet er av en ikke-triviell natur. Vi har delvis vist hvordan det kan brukes i arbeidet " Egenskaper, tid og hendelser", Rognes [5]. Endel av de satser som er bevist i dette sistnevnte arbeidet, og der beviset er basert på normalformsteoremet, blir flittig brukt i Rognes [6], "Forholdet mellom det mentale og det fysiske. Del II". Allerede dette illustrerer at normalformsteoremet er av interesse, også i en mer omfattende sammenheng av overveiende filosofisk karakter.

I dette skrift er hensikten å vise hvordan man kan bruke normalformsteoremet for å vise visse varianter av Craigs interpolasjonsteorem samt det som ofte går under navnet av Robinsons "Joint- consistency"-teorem innenfor rammen av den utsagnsteorien vi har formulert i Rognes [2]. Dette er strengt tatt ikke et direkte filosofisk anliggende, men bevisene for de teoremene vi her presenterer viser hva som kan utledes innenfor denne utsagnsteorien og gir en derfor et fyldigere bilde av hva teorien innebærer. Utsagnsteoriene i Rognes [2] burde ganske åpenbart ha krav på interesse fra filosofer, og hva som faktisk følger fra disse teoriene burde derfor påkalle en viss oppmerksomhet fra en filosof som er interessert i utvikle konsekvensene av en teori og se hvordan den passer sammen med andre oppfatninger av vitenskapsfilosofisk karakter.

La oss si noen ord om hva som forutsettes for at man kan lese dette skrift med en rimelig grad av forståelse. De generelle begrepsdannelser som trengs er det gjort rede for i arbeidet "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", Rognes [1]. Leseren bør ha satt seg grundig inn i dette arbeidet. Videre forutsettes det at leseren er fortrolig med skriftet som ble nevnt ovenfor, nemlig "En teori om presise deskriptive utsagn", Rognes [2]. Videre forutsettes det at leseren har lest Rognes [3], "En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn" og har lest arbeidet "Et normalformsteorem i teorien om presise deskriptive utsagn", Rognes [4]. Det bør også bemerkes at alle de begrepene, og den notasjon, som er innført i Rognes [3], og forøvrig de andre arbeidene vi har nevnt, vil bli brukt uten videre, og uten at de definisjonene vi tidligere har gitt vil bli gjentatt.

La oss så kort gjøre rede for for innholdet i de følgende paragrafer. I §2 gjør vi rede for de versjonene av normalformsteoremet vi legger til grunn. I §3 beviser vi endel satser som delvis har en viss interesse i seg selv, men som hovedsakelig vil bli brukt i beviset for interpolasjonsteoremet i den etterfølgende paragraf. I §4 formulerer vi vår versjon av Robinsons "Joint-Consistensy"-teorem samt tre versjoner av interpolasjonsteoremt og gir bevis for disse satsene.

§2 Normalformsteoremet i utsagnsteorien

Anta Δ er en ikke-tom utsagnsmengde. Da betegner $C(\Delta)$ den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon. Vi skal kalle $C(\Delta)$ for utsagnsmengden generert av Δ. Anta nå at θ er en delmengde av Δ. $SNu(\theta)$ vil da være den uendelig konjunksjon av alle utsagnene i θ. $SNu(Mg(Neg(x): x\hat{e}(\Delta-\theta)))$ vil være konjunksjonen av de diverse negasjonene av x ettersom x gjennomløper $\Delta-\theta$. Komjunksjonen av $SNu(\theta)$ og $SNu(Mg(Neg(x): x\hat{e}(\Delta-\theta)))$ kaller vi for tilstandsbeskrivelsen bestemt av θ

1 Se Rognes [4]

© Morten Harboe Rognes 2011

relativt til Δ, eller tilstandsbeskrivelsen over Δ bestemt av θ. I det følgende skal vi forkorte uttrykke "x er tilstandsbeskrivelsen bestemt av θ relativt til Δ med "TBS(x,θ,Δ)" Det forutsettes her at x er et utsagn, at θ, Δ er utsagnsmengder og at θ Inkl Δ. Vi kaller utsagnet x for en tilstandsbeskrivelse over Δ dersom og bare dersom det finnes en delmengde θ av Δ slik at x er tilstandsbeskrivelsen bestemt av θ relativt til Δ. Uttrykket " x er en tilstandsbeskrivelse relativt til Δ skal vi forkorte med "TBS(x,Δ)". De termene og prediaktene som vi så langt har omtalt og definert, nemlig "C(Δ)" samt "TBS(x,θ,Δ)" og "TBS(x,Δ)" kan defineres presist på den følgende måte:

Definisjon 2.1

(i) $C(\Delta) = SN(Mg(y: M(y) \,\&\, y \text{ Inkl } U \,\&\, \Delta \text{ Inkl } y \,\&\, (Az)(z\hat{e}y \rightarrow Neg(z)\hat{e}y) \,\&\, (Az)(M(z) \,\&\, z \text{ Inkl } y. \rightarrow SNu(z)\hat{e}y).$

(ii) $TB(x,\theta,\Delta) \leftrightarrow \Delta\hat{e}Pt(U) \,\&\, M(\theta) \,\&\, \theta \text{ Inkl } \Delta \,\&\, x = SNu(\theta)\Omega SNu(Mg(Neg(y): y\hat{e}(\Delta - \theta))$

(iii) $TBS(x,\Delta) \leftrightarrow \Delta\hat{e}Pt(U) \,\&\, (E\theta)(TB(x,\theta,\Delta)$

Det normalformsteoremet vi tidligere har bevist i Rognes [4] sier nå det følgende:

Anta Δ er en ikke-tom utsagnsmengde og at x er et vilkårlig utsagn i utsagnsmengden generert av Δ, dvs. C(Δ). Da finnes det en mengde Γ av delmengder av Δ, med andre ord et element Γ i Pt(Pt(Δ)), slik at x er identisk med disjunksjonen av de diverse tilstands-beskrivelsene over Δ bestemt av de θ som er med i Γ. Påstanden kan formuleres presist slik:

Teorem 2.1 (Normalformteorem Versjon I)
Anta $M(\Delta)$[2] & $\emptyset \neq \Delta$ Inkl U. La C(Δ) være definert ved:

$C(\Delta) = SN(Mg(y: M(y) \,\&\, y \text{ Inkl } U \,\&\, \Delta \text{ Inkl } y \,\&\, (Ax)(x\hat{e}y \rightarrow Neg(x)\hat{e}y) \,\&\, (Ax)(\, x\hat{e}Pt(y) \rightarrow SNu(x)\hat{e}y)))$

Holder disse forutsetningene har man:

$(Ax)(x\hat{e}C(\Delta) \rightarrow (EH)(H \text{ Inkl } Pt(\Delta) \,\&\, x = UNu(Mg(\, SNu(a \text{ U } Mg(Neg(x): x\hat{e}(\Delta - a))): a\hat{e}H))))$

Det følgende er en litt annen versjon av normalformsteoremet. Innholdet i teoremet kan formuleres slik: Anta Δ er en ikke-tom mengde av utsagn og at x er et vilkårlig utsagn i utsagnsmengden generert av Δ. Da finnes det en delmengde Y av mengden av tilstandsbeskrivelser over Δ slik at x er identisk med disjunksjonen av disse tilstandsbeskrivelsene, med andre ord har man at x= UNu(Y). Det er ganske lett å vise at denne versjonen av normalformsteoremet er ekvivalent med Teorem 2.1.

Teorem 2.2 (Normalformteorem Versjon II)

$\emptyset \neq \Delta\hat{e}Pt(U) \rightarrow (Ax)(x\hat{e}C(\Delta) \rightarrow (EY)(Y\hat{e}Pt(Mg(z: TBS(z,\Delta)) \,\&\, x = UNu(Y)))$

Er Δ en mengde med utsagn kaller vi en tilstandsbeskrivelse relativt til Δ for konsistent om den er forskjellig fra det kontradiktoriske utsagn k. Den følgende sats er interessant fordi den viser at dersom Δ;1 og Δ;2 er to ikke-tomme mengder med utsagn og mengden av utsagn generert av Δ;1 er identisk med mengden av utsagn generert at Δ;2 så har man faktisk at

2 Vi minner om at "M(x)" leses "x er en mengde". Dette er et primitivt predikat i den teorien vi arbeider med her, nemlig utsagnsteorien T;1.

© Morten Harboe Rognes 2011

mengden av konsistente tilstandsbeskrivelser relativt til Δ;1 er identisk med mengden av konsistente tilstandsbeskrivelser relativt til Δ;2.

Teorem 2.3 Anta Δ;1,Δ;2êPt(U) &Δ;1≠ø&Δ;2≠ø og at C(Δ;1) = C(Δ;2). Da har man:
Mg(x: TBS(x,Δ;1))–{k} = Mg(x: TBS(x,Δ;2))–{k}

Er Δ en vilkårlig ikke-tom utsagnsmengde er det i og for seg intet som tilsier at enhver tilstandsbeskrivelse relativt til Δ er konsistent. Dette vil bare være tilfelle under spesielle omstendigheter, nemlig om utsagnsmengden Δ er strengt uavhengig. Faktisk er det forholdsvis lett å etterprøve at man har at en utsagnsmengde Δ er strengt uavhengig hvis og bare hvis man har at enhver tilstandsbeskrivelse relativt til Δ er konsistent.

Uansett om Δ er en strengt uavhengig utsagnsmengde eller ikke har man imidlertid at mengden av sannhetsmengdene til de konsistente tilstandsbeskrivelse relativt til Δ utgjør en partisjon av mengden av mulige verdener I. Setter man

τ(Δ) = Mg(x: (Ey)(TBS(y,Δ) & y≠k & x=μ(y)))

ser man lett at de ymse elementene i τ(Δ) er ikke-tomme. Videre er det ikke vanskelig å se at de innbyrdes ikke har noen felles elementer og at unionen av dem alle er I. τ(Δ) oppfyller derfor alle de kravene som stilles til en partisjon. Man ser også lett at ethvert utsagn x i C(Δ) er slik at det må finnes en eller annen delmengde z av τ(Δ) slik at μ(x)=UN(z). Også dette er en alternativ måte å formulere normalformsteoremet på.

§3 Noen preliminære teoremer

I det følgende vil endel av forutsetningene i våre teoremer være felles. I de viktigste av våre satser vil vi anta at Δ er en utsagnsmengde, at θ;1 og θ;2 er to ikke-tomme delmengder av D, at C(1) er utsagnsmengden generert av θ;1 og endelig at C(2) er utsagnsmengden generert av θ;2. Vi skal uformelt omtale dette som "standardforutsetningen".

Den følgende sats sier nå at dersom denne standardforutsetningen holder, θ;1 og θ;2 er disjunkte, Δ;1 og Δ;2 er delmengder av henholdsvis C(1) og C(2) og vi dessuten har at de uendelige konjunksjonene av Δ;1 og Δ;2 er kontingente utsagn så har man hverken at konsekvenssystemet til Δ;1 er inkludert i konsekvenssystemet til Δ;2 eller omvendt.

Formelt formulert ser satsen slik ut:

Teorem 3.1: Anta SInd(Δ) & θ;1,θ;2 Inkl Δ & θ;1≠ø & θ;2≠ø & θ;1 Ωθ;2 =ø .
Anta videre:
C(i) = SN(Mg(y: y Inkl U & θ;i Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy) (i=1,2)
Anta dessuten at Δ;i Inkl C(i) & ø≠ μ(SNu(Δ;i)) ≠ I (i=1,2).
Da har man:
¬(k(Δ;1) Inkl k(Δ;2)) & ¬(k(Δ;2) Inkl k(Δ;1))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Det følger da, siden Δ;i Inkl C;i (i=1,2) og man har ved hjelp av definisjonen av C;i at C;i er lukket under uendelig konjunksjon, at (1) SNu(Δ;1)êC;1 & SNu(Δ;2)êC;2. Fra (1), hypotesene i satsen og normalformsteoremet følger det at det må finnes Γ;1 og Γ;2 der følgende holder:

(2) Γ;1 Inkl Pt(θ;1) & Γ;2 Inkl Pt(θ;2)

© Morten Harboe Rognes 2011

(3) $SNu(\Delta;1) = UNu(Mg(SNu(a\ U\ Mg(Neg(x): x\hat{e}(\theta;1\text{-}a))): a\hat{e}\Gamma;1))$

(4) $SNu(\Delta;2) = UNu(Mg(SNu(a\ U\ Mg(Neg(x): x\hat{e}(\theta;2\text{-}a))): a\hat{e}\Gamma;2))$

Vi definerer G;1 og G;2 ved henholdsvis:

(5) $G;1(a) = SNu(a\ U\ Mg(Neg(x): x\hat{e}(\theta;1\text{-}a)))$ om $a\hat{e}Pt(\theta;1)$ og

(6) $G;2(a) = SNu(a\ U\ Mg(Neg(x): x\hat{e}(\theta;2\text{-}a)))$ om $a\hat{e}Pt(\theta;2)$

Da har man at følgende holder:

(7) $G;1 : Pt(\theta;1)\ \text{-(1-1,på)} \rightarrow Rgn(G;1)$

(8) $I = UN/x\hat{e}Pt(\theta;1)/(\mu(G;1(x))$

(9) $(Aa)(Ab)(a,b\hat{e}Pt(\theta;1) \rightarrow (a\neq b \rightarrow \mu(G;1(a))\Omega\mu(G;1(b)) =\emptyset))$

Dessuten:

(7.1) $G;2 : Pt(\theta;2)\ \text{-(1-1,på)} \rightarrow Rgn(G;2)$

(8.1) $I = UN/x\hat{e}Pt(\theta;2)/(\mu(G;2(x))$

(9.1) $(Aa)(Ab)(a,b\hat{e}Pt(\theta;2) \rightarrow (a\neq b \rightarrow \mu(G;2(a))\Omega\mu(G;2(b)) =\emptyset))$

Fra (2), (3) og (5) følger:

(11) $SNu(\Delta;1) = UNu(Mg(G;1(a): a\hat{e}\Gamma;1)$

Tilsvarende kan man fra (2), (4) og (6) slutte at

(12) $SNu(\Delta;2) = UNu(Mg(G;2(a): a\hat{e}\Gamma;2)$

Fra den siste forutsetningen i teoremet har man:

(13) $\emptyset \neq \mu(SNu(\Delta;i)) \neq I$ om $i=1,2$

Det følger da at (14) $\Gamma;i$ SInkl $Pt(\theta;i)$ $(i=1,2)$ og (15) $\Gamma;i \neq \emptyset$ $(i=1,2)$

For hadde vi $\Gamma;i = Pt(\theta;i)$ ville vi i lys av (8), (8.1), (5), (6) (3) og (4) ha at $SNu(\Delta;1) = \mu;\text{-}1(I)$ som strider mot (13). Tilsvarende har man, om det motsatte av (15) holder, ie. at $\Gamma;i=\emptyset$ $(i=1,2)$, i lys av (3) og (4) at $SNu(\Delta;i) = \mu;\text{-}1(\emptyset)$. Dette strider likeledes mot (13).

(A) Vi skal nå vise at $\neg(k(\Delta;1)$ Inkl $k(\Delta;2))$. For å vise dette er det tilstrekkelig å vise at $\neg(\mu(SNu(\Delta;2))$ Inkl $\mu(SNu(\Delta;1))$ fordi vi har

$k(\Delta;1)$ Inkl $k(\Delta;2) \leftrightarrow \mu(SNu(\Delta;2))$ Inkl $\mu(SNu(\Delta;1))$

Det overlates til leseren, som en øvelse, å gi et bevis for denne sistnevnte påstand.

For å vise at $\neg(\mu(SNu(\Delta;2))$ Inkl $\mu(SNu(\Delta;1))$ er det åpenbart tilstrekkelig å vise

(16) $(Ew)(w\hat{e}I \ \&\ w\hat{e}\mu(SNu(\Delta;2)) \ \&\ \neg(w\hat{e}\mu(SNu(\Delta;1)))$

I lys av (14) og (15) må det finnes a1, a2 slik at

(17) $a2\hat{e}\Gamma;2 \ \&\ a1\hat{e}(Pt(\theta;1)\ \text{-}\Gamma;1)$

Siden $\theta;1\Omega\theta;2 =\emptyset$ og $\Gamma;2$ Inkl $Pt(\theta;2)$ & $\Gamma;1$ Inkl $Pt(\theta;1)$ har vi at a2 Inkl $\theta;2$ og a1 Inkl $\theta;1$ og derfor, i lys av den andre og tredje forutsetningen i satsen, at $a1\ \Omega\ a2=\emptyset$. Siden $\theta;1$, $\theta;2$ Inkl Δ har vi $a1Ua2$ Inkl Δ og derfor , siden $SInd(\Delta)$ per definisjon at:

(18) $\mu(\ SNu((a1Ua2)UMg(Neg(z):z\hat{e}\ (\Delta\text{-}(a1Ua2)))\ )\ ) \neq \emptyset$

Med andre ord finnes det en $w0\hat{e}I$ slik at

(19) $(Ay)(y\hat{e}(a1Ua2) \rightarrow w0 \models y)$

(20) $(Ay)(y\hat{e}(\Delta\text{-}(a1Ua2)) \rightarrow w0 \models Neg(y))$

Siden a2 Inkl $\theta;2$ & $\theta;2\Omega\theta;1 =\emptyset$ & $\theta;1,\theta;2$ Inkl Δ kan man slutte:

$(Ay)(y\hat{e}a2 \rightarrow w0 \models y\ )$ & $(Ay)(y\hat{e}(\theta;2\text{-}a2) \rightarrow w0 \models Neg(y))$

I lys av (5) følger da $w0\hat{e}\mu(G;2(a2))$ & $a2\hat{e}\Gamma;2$. Men fra dette og (4) har vi:

(21) $w0\hat{e}\mu(SNu(\Delta;2))$.

Fra (19) følger $(Ay)(y\hat{e}a1 \rightarrow w0 \models y)$ og, siden a1 Inkl $\theta;1$, $\theta;1\Omega\theta;2=\emptyset$ og $\theta;1,\theta;2$ Inkl Δ, kan man slutte $(Ay)(y\hat{e}(\theta;1\ \text{-}a1) \rightarrow w \models Neg(y))$. Det følger ved hjelp av (5) at man har:

$w0\hat{e}\mu(G;1(a1))$

© Morten Harboe Rognes 2011

Men ¬(a1êΓ;1) og hadde vi da at wêμ(SNu(Δ;1)) ville vi i lys av (3) og (5) ha at det fantes a slik at w0êG;1(a) & aêΓ;1. Men da måtte a=a1 når vi tar i betraktning at (9) holder. Dette er umulig. Det følger derfor at ¬(w0ê(SNu(Δ;1))). Dette og (21) impliserer (16).

(B) Vi må også bevise at ¬(k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)). Dette gjøres imidlertid ikke i detalj siden beviset blir helt analogt med det som er ført under (A).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED**.

Det neste teoremet vi retter oppmerksomheten mot sier at dersom standardforutsetningen vi omtalte ovenfor holder og vi har at x og y er kontingente utsagn i henholdsvis C(1) og C(2) der y er en logisk konsekvens av x, så har man utsagnsmengdene θ;1 og θ:2 har noen felles elementer. Med andre ord har vi:

Teorem 3.2: Anta SInd(Δ) & θ;1,θ;2 êΔ & θ;1≠ø & θ;2≠ø . Anta videre:
C(i) = SN(Mg(y: y Inkl U & θ;i Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy) (i=1,2)
Anta videre: xêC(1) & yêC(2) & ø≠ μ(x) ≠ I & ø≠ μ(y) ≠ I
Anta LK(x,y).
Da har man:
θ;1Ωθ;2≠ø

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og anta for reduktio ad absurdum at θ;1Ω θ;2=ø. Sett per definisjon Δ;1= {x} og Δ;2 = {y}. Da har vi:

(1) μ(SNu(Δ;1)) = μ(x) og μ(SNu(Δ;2)) = μ(y)

Det følger da at alle forutsetningene i Teorem 3.1 er oppfylt. Vi har da ved hjelp av Teorem 3.1 at ¬(k(Δ;1) Inkl k(Δ;2)). Nå har vi imidlertid at k(Δ;1) Inkl k(Δ;2) dersom μ(SNu(Δ;2)) Inkl μ(SNu(Δ;1)). Dette er i sin tur, i lys av (1) implisert av μ(y) Inkl μ(x) som er ekvivalent med at LK(x,y). Det følger at ¬LK(x,y). Men dette strider mot den siste forutsetningen i satsen. Det følger at θ;1Ω θ;2 ≠ ø. **QED**.

Vi fortsetter nå med å bevise endel enkle satser som er av interesse i denne forbindelse fordi de vil bli brukt i vårt bevis for interpolasjonsteoremet. Vi starter med:

Teorem 3.3: Anta βêU& α Inkl U og α≠ø. Da gjelder:
LK(UNu(Mg(C(x,β): xêα)), C(UNu(α),β)

Bevis: Siden vi generelt har at LK(z,w) hvis og bare hvis μ(w) Inkl μ(z) om z,w er vilkårlige utsagn, vil det være tilstrekkelig å vise at følgende holder, gitt forutsetningene i teoremet:

(1) μ(C(UNu(α),β)) Inkl μ(UNu(Mg(C(x,β): xêα)))

Anta derfor for for reduktio ad absurdum at det finnes w slik at

(2) wêμ(C(UNu(α),β)) og
(3) ¬(wê μ(UNu(Mg(C(x,β): xêα))))

Da har vi fra (3) at ¬(w ⊨ UNu(Mg(C(x,β):xêα))). Dette innebærer
(Ax)(xêα → ¬(w ⊨C(x,β))) Herav har man:

(4) (Ax)(xêα → (w ⊨x & ¬(w ⊨β)))

Fra (2) kan man slutte:

(5) (¬(Ex)(xêα & w ⊨x)) v w ⊨β

© Morten Harboe Rognes 2011

I lys av (5) er det naturlig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): ¬(Ex)(xêα & w ⊨x). Da har man (6) (Ax)(xêα → ¬(w ⊨x)). Nå har vi i kraft av forutsetningene at α≠ø. Det finnes derfor y slik at yêα. Fra dette, (4) og(6) følger w ⊨y & ¬(w ⊨y) som åpenbart er en motsigelse.

Tilfelle (ii): w ⊨β. Siden α≠ø ifølge forutsetningene i satsen og man fra (4) kan slutte α≠ø → ¬(w ⊨β), følger det at man også i dette tilfelle kan utlede w ⊨β & ¬(w ⊨β). Også dette er en motsigelse.

I begge tilfelle kan man utlede en motsigelse. Det følger at det ikke kan finnes noen w som oppfyller både (2) og (3). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Bemerkning: Forbeholdet om at α Inkl U & α≠ø er vesentlig. For er α =ø har vi UNu(α) = μ;-1(ø) og derfor at

μ(C(UNu(α),β) = μ(D(Neg(UNu(α)),β)) = μ(D(μ;-1(I),β)) = I U μ(β) = I.

På den annen side er, om α=ø, Mg(C(x,β): xêα) =ø og derfor

UNu(Mg(C(x,β): xêα)) = UNu(ø) =μ;-1(ø)

Siden μ;-1(I) umulig kan implisere μ;-1(ø) holder ikke satsen om α=ø.

Teorem 3.4: Anta βêU & α Inkl U og α≠ø. Da gjelder:
LK(SNu(Mg(C(x,β): xêα)), C(UNu(α),β)[3]

Bevis: Anta βêU & α Inkl U og α≠ø. Det vil være tilstrekkelig å vise:

(0) μ(C(UNu(α),β)) Inkl μ(SNu(Mg(C(x,β): xêα)))

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w der man har:

(1) w ⊨C(UNu(α),β)

(2) ¬(w ⊨ SNu(Mg(C(x,β): xêα)))

Fra (2) følger:

(3) (Ex)(xêα & w ⊨x & ¬(w ⊨β))

Fra (1) følger (4) ¬(Ex)(xêα & w ⊨x) v w ⊨β. Har man ¬(Ex)(xêα & w ⊨x) strider dette mot (3), siden (Ex)(xêα & w ⊨x) følger fra (3). Har man w ⊨β har vi også en motsigelse siden ¬(w ⊨β) følger fra (3). Det finnes altså ikke noen w som oppfyller (1) og (2). Det følger at (0) holder. **QED**.

Teorem 3.5: Anta α Inkl U & βêU. Da gjelder:
μ(C(UNu(α),β)) = I ↔ (Ax)(xêα → μ(C(x,β))=I)

Bevis: *(a)* Anta (1) μ(C(UNu(α),β)) =I og anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe x der man har xêα & μ(C(x,β)) ≠I. Siden μ(C(x,β)) Inkl I følger fra det siste at det må finnes w slik at wêI & ¬(wêμ(C(x,β))). Dette i sin tur impliserer at w ⊨x & ¬(w ⊨β). Siden xêα og w ⊨x har vi (Ey)(yêα & w ⊨y). Dette impliserer at w ⊨ UNu(α). På den annen side har ¬(w ⊨β). Det følger at vi derfor har ¬(w ⊨C(UNu(α),β)) Siden wêI har vi derfor μ(C(UNu(α),β)) ≠I. Dette strider mot (1).

(b) Anta (2) (Ax)(xêα → μ(C(x,β)) = I). Anta for reduktio ad absurdum at μ(C(UNu(α),β)) ≠ I Siden μ(x) Inkl I om x er et utsagn følger det at μ(C(UNu(α),β)) SInkl I og derfor at det finnes w der wêI & ¬(wêμ(C(UNu(α),β))). Dette

3 Teorem 3.1 og Teorem 3.2 er naturligvis analoge med de følgende to teoremer i utsagnslogikken, nemlig (a) (V/i,1,n/(p;i) → q) → V/i,1,n/(p;i→q) og (b) (V/i,1,n/(p;i) → q) → &/i,1,n/(p;i→q)

© Morten Harboe Rognes 2011

impliserer i sin tur at w ⊨ UNu(α) & ¬(w ⊨β). w ⊨UNu(α) innebærer at det finnes x slik at xêα & w ⊨x. Fra w ⊨x sammen med det at ¬(w ⊨β) følger ¬(w ⊨C(x,β)). Dette innebærer at μ(C(x,β))≠I. Sammen med det at xêα følger det at ¬(Ax)(xêα → μ(C(x,β)) = I). Dette strider mot (2). Det følger at μ(C(UNu(α),β)) = I. **QED**.

Teorem 3.6:[4] Anta α Inkl U & βêU. Anta α≠ø. Da gjelder:
(Ax)(xêα → μ(C(β,x))=I) → μ(C(β,UNu(α))) = I

Bevis: Anta (1) (Ax)(xêα → μ(C(β,x))). Anta for reduktio ad absurdum at μ(C(β,UNu(α))) = I. Siden μ(C(β,UNu(α))) inkl I følger det at det må finnes en w der wêI & w ⊨β & ¬(w ⊨UNu(α)). Dette siste impliserer at (2) (Ax)(xêα → ¬(w ⊨x)). Fra forutsetningen om at α≠ø følger det at det finnes x0 der x0êα. Fra dette og (2) følger ¬(w ⊨x0). Men siden w ⊨β har vi da ¬(wêμ(C(β,x0))). Fra dette følger ¬(μ(C(x0,β)) = I). I lys av at x0êα kan man da slutte (Ex)(xêα & ¬(μ(C(x,β)) = I)). Dette strider åpenbart mot (1). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Teorem 3.7: Anta α Inkl U & βêU. Da gjelder:
(Ax)(xêα → LK(β,x)) ↔ LK(β,UNu(α))

Bevis: Dette følger umiddelbart fra Teorem 3.5 siden man lett ser at
LK(β,UNu(α)) ↔ μ(C(UNu(α),β)) =I
og at LK(β,x) ↔ μ(C(x,β)) =I. Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Teorem 3.8: Anta α Inkl U & βêU. Da gjelder:
(Ax)(xêα → LK(x,β) & α≠ø →LK(UNu(α),β)

Bevis: Denne satsen følger lett fra Teorem 3.6 i det man lett innser at
LK(x,β) ↔ μ(C(β,x)) =I og at LK(UN(α),β) ↔ μ(C(β,UNu(α))) =I. **QED**.

§4 Interpolasjonsteoremet

Vi skal nå formlere og bevise vår første versjon av interpolasjonsteoremet. Dette sier at dersom standardforutsetningen holder, x,y er kontingente utsagn som er med i henholdsvis C(1) og C(2) og y er en logisk konsekvens av x, så finnes det et interpolasjonsutsagn z som er med i utsagnsmengden generert av snittet av θ;1 og θ;2 slik at z er en logisk konsekvens av x og y er en logisk konsekvens av y. Med andre ord har vi:

Teorem 4.1:[5] (*Interpolasjonsteorem I*)

4 Man bør notere forskjellen mellom denne satsen og halvdelen mot venstre i Teorem 3.5. Man ser at venstre side i Teorem 3.5 er μ(C(UNu(α),β)) =I. I denne satsen er derimot konsekventen μ(C(β,UNu(α))) = I

5 En versjon av dette teoremet for vanlig første-ordens logikk befinner seg i Shoenfield [1] side 80. Shoenfield gir et modellteoretisk bevis for satsen. Et teorem av denne typen ble først formulert og bevist av Craig i Craig [1].

© Morten Harboe Rognes 2011

Anta SInd(Δ) & θ1,θ2 Inkl Δ & θ;1≠ø & θ;2≠ø . Anta videre:
C(i) = SN(Mg(y: y Inkl U & θi Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)) (i=1,2)
Anta: xêC(2) & yêC(1). Anta ø≠μ(x)≠I & ø ≠μ(y) ≠ I og at LK(x,y)
Da finnes det et utsagn z med følgende egenskaper:
(i) zêSN(Mg(y: y Inkl U & θ1Ωθ2 Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy))
(ii) LK(x,z) & LK(z,y)

Vårt bevis for denne satsen er ganske langt:

Bevis: Vi definerer først de følgende tre funksjoner G;1, G;2 og G;<1,2> ved
(1) G;1(a) = SNu(aU Mg(Neg(y): yê(θ1-a))) om aêPt(θ1)
(2) G;2(a) = SNu(aU Mg(Neg(y): yê(θ2-a))) om aêPt(θ2)
(3) G;<1,2>(a) = SNu(aU Mg(Neg(y): yê((θ1Ωθ2)-a))) om aêPt(θ1Ωθ2)
Fra forutsetningene i satsen og normalformsteoremet, Teorem 2.1, følger det at det finnes Γ1 og Γ2 der man har:
(4) Γ1 Inkl Pt(θ1) & y = UNu(Mg(G;1(a): aêΓ1)
(5) Γ2 Inkl Pt(θ2) & x = UNu(Mg(G;2(a): aêΓ2)
Fra forutsetningene i satsen og Teorem 3.2 følger dessuten at
(6) θ1 Ω θ2 =ø
Siden vi i lys av forutsetningene i teoremet har at LK(x,y) følger ved hjelp av (4) at
(7) LK(x,UNu(Mg(G;1(a): aêΓ1))
Fra (7) og Teorem 3.7 følger videre:
(8) (Aa)(aêΓ1 → LK(x, G;1(a)))
La a være et vilkårlig element slik at (9) aêΓ1. Siden Γ1 Inkl Pt(θ1) følger at a Inkl θ1. Vi må derfor ha i lys av forutsetningen i teoremet om C(1) at
(10) a U Mg(Neg(x): xê(θ1-a)) Inkl C(1)
Vi setter per definisjon:
(11) C(1,2) = SN(Mg(y: yêPt(U) & (θ1Ωθ2)Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy))
Videre setter vi per definisjon ξ(a) = aΩθ2. Da har man åpenbart, siden a Inkl θ1 at ξ(a) Inkl θ1 Ω θ2.
Vi ønsker nå å vise at følgende holder:

(12) LK(G;<1,2>(ξ(a)), G;1(a))
(13) LK(x, G;<1,2>(ξ(a)))

Vi viser først at (12) holder: Anta for vilkårlig wêI at wêμ(G;1(a)). Ved hjelp av (1) kan man da slutte: (14) (Ay)(yêa → w ⊨y) & (Ay)(yê(θ1-a) → w ⊨ Neg(y))
Vi må vise at wêμ(G;<1,2>(ξ(a))). I lys av (3) innebærer dette at det vil være tilstrekkelig å vise:
(+) (Ay)(yêξ(a) → w ⊨y) & (Ay)(yê(θ1Ωθ2-ξ(a)) → w ⊨Neg(y))
Er yêξ(a) for vilkårlig y har vi ved hjelp av definisjonen av ξ(a) at yêaΩθ2. Da har vi yêa og derfor ved hjelp av (14) at w ⊨y. Er yê(θ1Ωθ2-ξ(a)) har vi yêθ1 & yêθ2 &¬(yêξ(a)). Dette innebærer i lys av definisjonen av ξ at vi har yêθ1Ωθ2&[(¬(yêa))v(¬(yêθ2))]. Dette

© Morten Harboe Rognes 2011

impliserer at yêθ1 & ¬(yêa), med andre ord at yê(θ1-a). Fra dette og den andre konjunkten i (14) kan man slutte at w ⊨Neg(y).

Disse overveielsene viser at (14), og derfor wêμ(G;<1,2>(ξ(a))) holder. Vi har derfor vist at μ(G;1(a)) Inkl μ(G;<1,2>(ξ(a))). Det følger at (12) holder.

Vi må naturligvis vise at (13) holder. Vi har at a er et vilkårlig element som oppfyller (9). Fra (9) og (8) følger (15) LK(x,G;1(a)). Anta for reduktio ad absurdum at (13) er usann, med andre ord at ¬LK(x, G;<1,2>(ξ(a))). Dette innebærer at

(16) μ(C(G;<1,2>(ξ(a)), x)) SInkl I

Nå har man:

(17) G;<1,2>(ξ(a)) ê C(1,2)

Dessuten har vi at xêC(2). Siden (18) C(1,2) Inkl C(2), dette vises meget lett ved induksjon, følger det ved hjelp av (17) at

(19) C(G;<1,2>(ξ(a)), x) ê C(2)

Gitt forutsetningene i satsen kan man da ved hjelp av normalformsteoremet, Teorem 2.1, slutte at det må finnes en Γ3 slik at

(20) Γ3êPt(θ2) & C(G;<1,2>(ξ(a)), x) = UNu(Mg(G;2(a): aêΓ3))

Fra (16) og (20) følger nå:

(21) μ(UNu(Mg(G;2(a): aêΓ3))) SInkl I

Det følger at det finnes wêI slik at ¬(w ⊨ UNu(Mg(G;2(a): aêΓ3)) og derfor at

(22) (Aa)(aêΓ3 → ¬(wê μ(G;2(a))))

Nå kan man imidlertid lett vise at

(23) I = μ(UN/aêPt(θ2)/(G;2(a)))

Det følger at det finnes a0êPt(θ2) slik at

(24) wêμ(G;2(a)) & a0êPt(θ2)

Fra (22) og (24) følger (25) ¬(a0êΓ3). Vi har at a0 Inkl θ2 Inkl θ1Uθ2. Dessuten har vi a Inkl θ1 og derfor a-θ2 Inkl θ1 Inkl θ1Uθ2. Setter vi derfor per definisjon

(26) a1 = a0 U (a-θ2)

har vi (27) a1 Inkl θ1Uθ2 Inkl Δ. Siden SInd(Δ) har vi per definisjon at det må finnes w0êI slik at

(28) w0ê (μ(SNu(a1)) Ω μ(SNu(Mg(Neg(z):zê(Δ-a1)))))

Fra (28) følger:

(29) (Ax)(xêa1 → w0 ⊨x) & (Ax)(xê(Δ-a1) → w0 ⊨ Neg(x))

Siden vi per definisjon av a1 har at a0 Inkl a1 har vi ved hjelp av den første konjunkten i (29) at (30) (Ax)(xêa0 → w0 ⊨x)

Er, for vilkårlig x, xê(θ2-a0) har vi xêθ2 & ¬(xêa0). Har vi da xêa1 følger ved hjelp av definisjonen av a1 at xêa0 v xê(a-θ2). Dette er umulig. Det følger at xê(Δ-a1) og derfor ved hjelp av (29) at w0 ⊨Neg(x). Vi har altså:

(31) (Ax)(xê(θ2-a0) → w0 ⊨Neg(x))

Fra (30) og (31) følger:

w0êμ(SNu(a0 U Mg(Neg(z):zê(θ2-a0)))) = μ(G;2(a0))

Hadde vi nå w0 ⊨ UNu(Mg(G;2(a): aêΓ3)) ville vi ha w0 êG;2(a') for noe a'êΓ3. Da ville vi i lys av definisjonen av G;2 ha a0=a'êΓ3 som strider mot (25). Vi har derfor

¬(w0êμ(UNu(Mg(G;2(a):aêΓ3)))) og i lys av (20) følger da:

(32) ¬(w0 ⊨ C(G;<1,2>(ξ(a)), x))

Fra (32) følger imidlertid:

© Morten Harboe Rognes 2011

(33) $w0 \models G;<1,2>(\xi(a)) \ \& \neg(w0 \models x)$

Fra den første halvdelen i (33) følger:

(34) $(Az)(z\hat{e}\xi(a) \rightarrow w0 \models z) \ \& \ (Az)(z\hat{e}((\theta 1 \Omega \theta 2)\text{-}\xi(a)) \rightarrow w0 \models Neg(z))$

Anta for vilkårlig z at zêa.Da har vi enten zêθ2 eller ¬(zêθ2). I det første tilfellet har vi at zê(aΩθ2)=ξ(a) (Jmf. definisjonen av ξ). Fra dette og (34) følger w0 ⊨z. I det andre tilfellet har man at zê(a-θ2) Inkl a1. Vi har da w0 ⊨z i lys av (29). Det følger at

(35) $(Az)(z\hat{e}a \rightarrow w0 \models z)$

Anta videre at z er et vilkårlig element og at zê(θ1-a). Da har vi zêθ1 & ¬(zêa). Det er igjen to muligheter: Man kan ha at zêθ2 eller ¬(zêθ2).

Tilfelle (i): Anta zêθ2. Da har vi zêθ1Ωθ2 og ¬(zêξ(a)). For i motsatt fall ville vi ha etter definisjonen av ξ(a) at zêaΩθ2 som er umulig siden ¬(zêa). Det følger at zê((θ1Ωθ2)-ξ(a)) og derfor i lys av (34) at w0 ⊨Neg(z).

Tilfelle (ii): ¬(zêθ2). Da har vi siden zê(θ1-a) Inkl θ1 Inkl Δ at zêΔ. Hadde vi zêa1 ville vi, etter definisjonen av a1, ha at zêa0 v zê(a-θ2). Men a0 Inkl θ2. I det første tilfelle ville vi da ha zêθ2 som er umulig. Har vi at zê(a-θ2) har vi zêa, men det er også umulig siden vi forutsetter at zê(θ1-a). Det følger at zê(Δ-a1). Fra dette og (29) følger w0 ⊨Neg(z),

I begge tilfelle har vi w0 ⊨Neg(z). Vi har derfor vist

(36) $(Az)(z\hat{e}(\theta 1\text{-}a) \rightarrow w0 \models Neg(z))$

Fra (35), (36) og definisjonen av G;1 følger:

(37) $w0 \models g;1(a)$. Men dette og (33) impliserer $w0 \models G;1(a) \ \& \ \neg(w0 \models x)$. Fra dette kan man slutte ¬(w0 ⊨C(G;1(a),x)). Da følger μ(C(G;1(a),x)) ≠I og derfor ¬LK(x,G;1(a)). Men dette strider åpenbart mot (15). Antagelsen at (13) er usann fører derfor til en motsigelse.

Vi har nå vist at (12) og (13) holder for vilkårlige a som oppfyller kravet (9). Det følger at vi har:

(38) $(Aa)(a\hat{e}\Gamma 1 \rightarrow LK(G;<1,2>(\xi(a)), G;1(a)))$

(39) $(Aa)(a\hat{e}\Gamma 1 \rightarrow LK(x,G;<1,2>(\xi(a))))$

Fra (4) og forutsetningen μ(y)≠ø følger at (40) Γ1 ≠ø. Fra (39) og Teorem 3.7 følger:

(41) $LK(x, UNu(Mg(G;<1,2>(\xi(a)) : a\hat{e}\Gamma 1)))$

Nå har vi åpenbart at det fra (38) følger

(42) $(Aa)(a\hat{e}\Gamma 1 \rightarrow LK(UNu(Mg(G;<1,2>(\xi(x)) :x\hat{e}\Gamma 1)), G;<1,2>(\xi(a))))$

Sett nå per definisjon:

$z0 = UNu(Mg(G;<1,2>(\xi(x)) :x\hat{e}\Gamma 1))$

Da har vi fra (38) og (42) at

(43) $(Aa)(a\hat{e}\Gamma 1 \rightarrow LK(z0, G;<1,2>(\xi(a))))$

(44) $(Aa)(a\hat{e}\Gamma 1 \rightarrow LK(G;<1,2>(\xi(a)), G;1(a)))$

og herav:

(45) $(Aa)(a\hat{e}\Gamma 1 \rightarrow LK(z0, G;1(a))$.

Siden Γ1≠ø følger fra dette og Teorem 3.7 at (46) $LK(z0, UNu(Mg(G;1(a): a\hat{e}\Gamma 1)))$

I sin tur kan vi herav, ved hjelp av (4) slutte

(47) $LK(z0, y)$

Men fra definisjonen av z0 og (41) følger (48) LK(x,z0). N"har vi G;<1,2>(ξ(a)) êC(1,2) for alle aêΓ1. Dessuten er C(1,2) lukket under uendelig disjunksjon siden den er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon. Det følger at

(49) $z0 = UNu(Mg(G;<1,2>(\xi(x)) :x\hat{e}\Gamma 1))\hat{e}\ C(1,2)$

Fra (47), (48) og (49) følger $(Ez)(z\hat{e}C(1,2) \ \& \ LK(x,z) \ \& \ LK(z,y))$. Dette viser at satsen holder. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2011

Det er mulig å skjerpe Teorem 4.1 noe i det man kan vise at det er mulige å sløyfe forutsetningen om at ø≠μ(x) ≠ I & ø≠ μ(y) ≠ I.

La oss kalle et utsagn x for kontingent hvis og bare hvis ø≠ μ(x) ≠I. La oss videre kalle utsagnet x for nødvendig sant om μ(x)=I, og la oss endelig kalle x for kontradiktorisk hvis og bare hvis μ(x)=ø. Som man ser fra disse definisjonene vil det finnes nøyaktig et utsagn som er nødvendig sant, nemlig μ;-1(I). Tilsvarende vil det finnes et og bare et utsagn som er kontradiktorisk, nemlig μ;-1(ø).

La oss anta at alle forutsetningene i Teorem 4.1 holder bortsett fra forutsetningen om at utsagnene x og y er kontingente. Vi kan da skille mellom følgende muligheter:

Tilfelle (i): x,y er kontingente. Da viser Teorem 4.1 at satsen holder.

Tilfelle (ii): x er kontingent og y er ikke kontingent. I dette tilfelle kan vi sondre mellom to undertilfelle alt ettersom y er nødvendig eller y er et kontradiktorisk utsagn. Undertilfelle (a). y er nødvendig. Dette er imidlertid umulig fordi vi antar LK(x,y) og et kontingent utsagn kan ikke følge fra det nødvendige utsagnet. Undertilfelle (b): y er det kontradiktoriske utsagnet. Da ser man at y også er med i C(1,2) og det vil i dette tilfellet eksistere et interpolasjonsutsagn.

Tilfelle (iii): x er ikke kontingent og y er kontingent. Er x da det nødvendige utsagn vil x selv utgjøre det fornødne interpolasjonsutsagn. Det er imidlertid utelukket at x er det kontradiktoriske utsagn siden vi forutsetter at LK(x,y) og et kontingent utsagn kan ikke ha det kontradiktoriske utsagn som konsekvens.

Tilfelle (iv): x, såvel som y er ikke-kontingente. Vi må da undersøke fire undertilfelle: (a) x er det kontradiktoriske utsagnet og y det nødvendige. Dette tilfellet er imidlertid utelukket siden det forutsettes i satsen at LK(x,y). (b) x er et nødvendig utsagn og y det samme. Da er x=y og x kan brukes som interpolasjonsutsagn. (c) x er det kontradiktoriske utsagn og y er det samme. Da har vi igjen at x=y og at x er et egnet interpolasjonsutsagn. (d) x er det nødvendige utsagn og y det kontradiktoriske utsagn. Man ser da at y vil være et egnet interpolasjonsutsagn.

Man ser fra disse overveielsene at selv om man stryker forutsetningen ø ≠ μ(x) ≠ I & ø≠μ(y) ≠ I fra Teorem 4.1 holder teoremet. Vi har med andre ord at den følgende sats holder:

Teorem 4.2: (*Interpolasjonsteorem II*)
Anta SInd(Δ) & θ1,θ2 Inkl Δ & θ;1≠ø & θ;2≠ø . Anta videre:
C(i) = SN(Mg(y: y Inkl U & θi Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)) (i=1,2)
Anta: LK(x,y) & xêC(2) & yêC(1).Da finnes det et utsagn z med følgende egenskaper:
(i) zêSN(Mg(y: y Inkl U & θ1Ωθ2 Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)))
(ii) LK(x,z) & LK(z,y)

Den følgende sats kan oppfattes som et korollar til Teorem 4.2:

Teorem 4.3[6]: (*Joint Consistency*)
Anta SInd(Δ) & θ1,θ2 Inkl Δ & θ;1≠ø & θ;2≠ø . Anta videre:

6 En versjon av "Joint-Consistency"-teoremet for første-ordens logikk finner man i Shoenfield [1] side 79.

© Morten Harboe Rognes 2011

C(i) = SN(Mg(y: y Inkl U & θi Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)) (i=1,2)
Anta Δ;1 Inkl C(1) og Δ;2 Inkl C(2). Da gjelder:
¬Cons(Δ;1 U Δ;2) ↔ (Ey)(yêk(Δ;1) & Neg(y)ê k(Δ;2) &
yêSN(Mg(y: y Inkl U & θ1Ωθ2 Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy))))

Bevis: Kondisjonalen mot venstre i konsekventen i teoremet er opplagt. Anta forutsetningene holder og ¬Cons(Δ;1 UΔ;2). Da har man at μ(K(SNu(Δ;1),SNu(Δ;2)))=ø og derfor at μ(Neg(K(SNu(Δ;1),SNu(Δ;2)))). Dette innebærer at (1) LK(Neg(SNu(Δ;2)), SNu(Δ;1))
Fra forutsetningene i satsen følger (2) SNu(Δ;1)êC(1) & SNu(Δ;2)êC(2) siden C(1) og C(2) er lukket under uendelig konjunksjon. Fra forutsetningene i satsen, (1), (2) og Teorem 4.2 følger eksistensen av et utsagn r der

rêSN(Mg(y: y Inkl U & θ1Ωθ2 Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy))))

og der man har (3) LK(Neg(SNu(Δ;2)),r) & LK(r,SNu(Δ;1)). Det følger at LK(Neg(r), SNu(Δ;2)) og dette sammen med (3) impliserer Neg(r)êk(Δ;2) & rêk(Δ;1). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Man ser fra dette beviset at "Joint Consistency"-teoremet ovenfor kan oppfattes som et forholdsvis enkelt korollar til interpolasjonsteoremet, Teorem 4.2. Dette gjelder også for den følgende sats som tilsynelatende er en mer generell versjon av Teorem 4.1

Teorem 4.4: (*Interpolasjonsteorem Generell versjon*)
Anta SInd(Δ) & θ1,θ2 Inkl Δ . Anta videre:
C(i) = SN(Mg(y: y Inkl U & θi Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)) (i=1,2)
Anta: Γ;2 Inkl C(2) & Γ;1 Inkl C(1) og anta videre:
xêC(1) & yêC(2)
Anta tilslutt: LK;m(C(x,y), Γ;1 U Γ;2)
Da finnes det et utsagn z med følgende egenskaper:
(i) zêSN(Mg(y: y Inkl U & θ1Ωθ2 Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)
(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)))
(ii) LK;m(C(x,z), Γ;1) & LK;m(C(z,y), Γ;2)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Siden Γ;1 Inkl C(1) og Γ;2 Inkl C(2) har vi at SNu(Γ;1)êC(1) og SNu(Γ;2) êC(2). Det følger fra den siste forutsetningen at
(1) LK(C(x,y), K(SNu(Γ;1),SNu(Γ;2)))
Siden vi har μ(C(K(SNu(Γ;1),SNu(Γ;2)), C(x,y)) =
μ(C(K(SNu(Γ;1),x), C(SNu(Γ;2),y)))
har man: (2) LK(C(SNu(Γ;2),y)), K(SNu(Γ;1),x))
Siden x, SNu(Γ;1)êC(1) følger det at (3) K(SNu(Γ;1),x)êC(1). Siden
C(SNu(Γ;2),y) = Neg(K(SNu(Γ;2), Neg(y)) og vi har y, SNu(Γ;2)êC(2) følger det at (4) C(SNu(Γ;2),y)êC(2). Fra (2), (3), (4), forutsetningene i satsen og Teorem 4.2 følger nå eksistensen av et utsagn r der:
(5) rêSN(Mg(y: y Inkl U & θ1Ωθ2 Inkl y & (Ax)(xêy → Neg(x)êy)

© Morten Harboe Rognes 2011

(Ax)(x Inkl y → SNu(x)êy)))

og (6) LK(C(SNu(Γ;2),y),r) & LK(r, K(SNu(Γ;1),x))

Nå er det lett å vise at

(7) LK(C(SNu(Γ;2),y),r) ↔ LK;m(C(r,y), Γ;2)

Videre er det ikke vanskelig å vise at

(8) LK(r, K(SNu(Γ;1),x)) ↔ LK;m(C(x,r), Γ;1) (Leseren oppfordres til å gi bevis for (7) og (8)). Fra (6), (7) og (8) følger:

(9) LK;m(C(r,y), Γ;2) & LK;m(C(x,r), Γ;1)

Dette sammen med (5) imliserer så konsekventen i satsen. **QED**.

© Morten Harboe Rognes 2011

Referanser

Rognes [1]	Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Maskinskrevet manus. 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten. *En teori om presise deskriptive utsagn*. Maskinskrevet manus. 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten. *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn.* Maskinskrevet manus. 1987
Rognes [4]	Rognes, Morten. *Et normalformsteorem i teorien om presise deskriptive utsagn.* Maskinskrevet manus. 1995
Rognes [5]	Rognes, Morten. *Egenskaper, tid og hendelser*. Maskinskrevet manus. 2010
Rognes [6]	Rognes, Morten. *Forholdet mellom det mentale og det fysiske. Del II. Maskinskrevet manus*. 2011
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic*. London. Addison-Wesley Publishing Company. 1967
Craig [1]	Craig, William. *Linear reasoning*. Journal of Symbolic Logic. vol. 21. pp 250- 268. 1957

© Morten Harboe Rognes 2011